Title	パターン形成のスケーリング理論(V理論II,相転移における秩序形成過程の動力学,科研費研究会報告)
Author(s)	劉, 勇; 鈴木, 増雄
Citation	物性研究 (1986), 46(4): 83-86
Issue Date	1986-07-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92094
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

パターン形成のスケーリング理論

(東大理) 劉 勇, 鈴木増雄

不安定状態から安定状態に移っていく過渡現象は, 非平衡系に多く見られる現象である。その場合, 系が非線型性を持つため, 線型的扱いが困難である。Suzuki[1)]の過渡現象スケーリング理論は, この現象を記述するのに非常に有力である。最近, Suzuki, Liu and Tsuno[2)]は, Suzukiの理論を, 時間相関を持ったカラード・ノイズの場合に拡張した。Kawasaki, Yalabik and Gunton[3)]は, Suzukiの理論を使って, TDGLモデルの解析を行い, また de Pasquale, Tartaglia and Tombesi[4)]は, 有限の強さのノイズに対するスケーリング理論の有効性を, 解析的及び数値的に研究した。

今回, われわれは, Suzuki[1)]のスケーリング理論を周期的空間パターン形成に応用し, スケーリング理論の一般性について述べる。われわれが扱う基礎方程式は, Swift and Hohenberg[5)]が導いたTDGL型の方程式で, 次のようである:

$$\dot{\varphi}(x,t)=\gamma\varphi(x,t)-g\varphi(x,t)^3-D(\nabla^2+k_c^2)^2\varphi(x,t)+\eta(x,t) \tag{1}$$

但し $\varphi(x,t)$ は空間に依存する局所オーダー・パラメーター, $\eta(x,t)$ はノイズである.

$$\langle\eta(x,t)\rangle=0,\quad \langle\eta(x,t)\eta(x',t')\rangle=2\varepsilon\delta(x-x')\delta(t-t') \tag{2}$$

γ, g, D, k_c, ε は, それぞれ系に特有のパラメーターとする。最近, Greenside and Coughran[6)]は, (1) を使った計算機実験を行った(但し, 彼らは (1) のノイズの項を無視するかわりに, 初期条件をランダムとして, 行った)。以下の計算では, われわれは次の仮定をする: $\varphi(x,0)\equiv 0$, $\varepsilon\ll 1$, $\Gamma_x \gg \Gamma_y$ (系が一次元的だと仮定, ただし Γ_x, Γ_y はアスペクト・レイショ).

(1) について, Fourier変換を行う:

$$\dot{\varphi}_k=\gamma\varphi_k-\frac{g}{(2\pi)^2}\int dk'\int dk''\int dk'''\delta(k-k'-k''-k''')\varphi_{k'}\varphi_{k''}\varphi_{k'''}-D(k^2-k_c^2)^2\varphi_k+\eta_k(t) \tag{3}$$

但し

$$\varphi_k(t)\equiv\int e^{ikx}\varphi(x,t)dx,\quad \varphi_k(0)\equiv 0,\ \langle\eta_k(t)\rangle=0,\ \langle\eta_k(t)\eta_{k'}(t')\rangle=4\pi\varepsilon\delta(k+k')\delta(t-t') \tag{4}$$

(3) からわかるように, 非線型性 g のため, 三つの違う波数のモードがおたがいにカップリングしているため, 次のように, 非線型性 g について展開する:

$$\varphi_k\equiv\sum_{n=0}^{\infty}g^n h_n \tag{5}$$

h_nは次のようになる：

$$
\begin{cases}
h_0 = e^{\gamma t} e^{-D(k^2-k_c^2)^2 t} \int_0^t ds\, e^{-\gamma s} e^{D(k^2-k_c^2)^2 s} \eta_k(s) \\
h_1 = -\frac{1}{(2\pi)^2} e^{\gamma t} e^{-D(k^2-k_c^2)^2 t} \cdot \int_0^t e^{-\gamma s} e^{D(k^2-k_c^2)^2 s} \int dk' \int dk'' \int dk''' \delta(k-k'-k''-k''') h'_0 h''_0 h'''_0 \\
\vdots
\end{cases}
\tag{6}
$$

但し　$h' \equiv h(k')$. 次に，Fourier Spaceでの相関関数を調べる：

$$C(k,\bar{k}) \equiv \langle \varphi_k \varphi_{\bar{k}} \rangle = \langle h_0 \bar{h}_0 + g(h_0 \bar{h}_1 + h_1 \bar{h}_0) + \cdots \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} g^n C_n(k,\bar{k}) \tag{7}$$

$$C(x,t) \equiv C(x_1-x_2, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk \int d\bar{k}\, e^{-ikx_1 - i\bar{k}x_2} C(k,\bar{k}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} g^n C_n(x,t) \tag{8}$$

ゼロ次では：

$$C_0(k,\bar{k}) = \frac{2\pi\varepsilon\delta(k+\bar{k}) e^{2\gamma t} \tilde{C}_0(k,t)}{\gamma - D(k^2-k_c^2)^2} \tag{9}$$

但し

$$\tilde{C}_0(k,t) \equiv e^{-2D(k^2-k_c^2)^2 t} \tag{10}$$

時間tが十分大きいところでは，$\tilde{C}_0$は次のように近似できる：（図I）

$$\tilde{C}_0(k,t) \approx e^{-8Dk_c^2(k+k_c)^2 t} + e^{-8Dk_c^2(k-k_c)^2 t} \tag{11}$$

故に

$$C_0(x,t) = \frac{\varepsilon}{\gamma} e^{2\gamma t} \frac{e^{-\frac{x^2}{32Dk_c^2 t}}}{\sqrt{32\pi D k_c^2 t}} \cos(k_c x) \tag{12}$$

C_0は非線型性gを無視した線型理論に相当する。(12)から，オーダー・パラメーターの指数関数的成長，及びk_cを波数とする空間周期パターンのドメインが$\sqrt{t}$で拡がる様子がわかる。但し，非線型性を無視したため，オーダー・パラメーターはいつまでも成長しつづけ，安定状態におちつく機構を記述していない。次に，非線型性gについての高次項を計算する。

(11)の近似を使うと，n次の項は，次のようになることが示せる：

$$C_n(x,t) = \left\langle \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^n \left(\frac{\xi^2 e^{2\gamma t}}{\sqrt{32\pi D k_c^2 t}} \right)^{n+1} \right\rangle_{\xi} e^{-\frac{x^2}{32Dk_c^2 t}} \cos(k_c x) \tag{13}$$

但し

$$\langle \xi \rangle = 0 \;,\; \langle \xi^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{\gamma} \tag{14}$$

(14)からわかるように、時間tが大きいところでは、(8)の各各の項が時間にしたがって、指数関数的に発散する。そこで、われわれは次のようなscaling limitを取る：

$$\text{SC-lim} \equiv \lim_{t\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{\varepsilon e^{2\gamma t}}{\sqrt{32\pi D k_c^2 t}} = \text{fixed} \right) \tag{15}$$

すると、(8)の級数は、次のような解にまとめられる：

$$C(x,t) = \left\langle \frac{\dfrac{\xi^2 e^{2\gamma t}}{\sqrt{32\pi D k_c^2 t}}}{1 + \dfrac{g}{\gamma} \dfrac{\xi^2 e^{2\gamma t}}{\sqrt{32\pi D k_c^2 t}}} \right\rangle_\xi e^{-\frac{x^2}{32 D k_c^2 t}} \cos(k_c x) \tag{16}$$

但し、$\langle \xi \rangle = 0$、$\langle \xi^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{\gamma}$。(15)の新しくModifyしたscaling limitとSuzuki[1]のscaling limit

$$\text{SC-lim}^{(S)} = \lim_{t\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\varepsilon e^{2\gamma t} = \text{fixed} \right) \tag{17}$$

との違いに注目されたい。(16)からわかるように、$C(x,t)$は非線型性gを含んでいるため、時間が大きいところで全空間にひろがるコヒーレントな安定な周期パターンにおちつく様子を正しく記述している。

今までは時間がある程度大きいところの議論であったが、次に時間が小さい初期ふるまいについて考える。この場合、$\tilde{C}_0$については次のように近似する（図II）：

$$\tilde{C}_0(k,t) \approx \begin{cases} 1 & |k| \leq k_{1/2} \\ 0 & |k| > k_{1/2} \end{cases} \tag{18}$$

但し、$k_{1/2}$は、$\tilde{C}_0$がPeakの半分になるところのkの値とする。$C(x,t)$は

$$C(x,t) \simeq \frac{\varepsilon}{\gamma} \left(e^{2\gamma t} - 1 \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{\sqrt{2\pi^2 D t}}}}{(2\pi^4 D t)^{1/4}} \qquad (t\text{小さい}) \tag{19}$$

秩序ができるまでに要する時間t_0を、オーダー・パラメーターが、最終値の半分まで成長した時刻と定義すると、

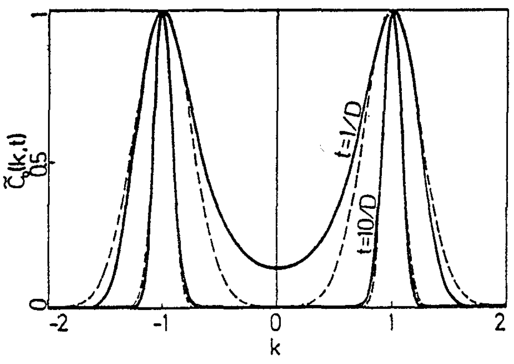
$$t_0 \simeq \frac{1}{2\gamma} \log\left(\frac{\gamma^2}{g} \frac{\sqrt{32\pi D k_c^2}}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{4\gamma} \log\left(\frac{1}{2\gamma} \log\left(\frac{\gamma^2}{g} \frac{\sqrt{32\pi D k_c^2}}{\varepsilon} \right) \right) \tag{20}$$

(20)の第一項は、Suzukiの理論のオンセット・タイムに相当し、第二項は空間相互作用のため、余分にかかる時間を表す。

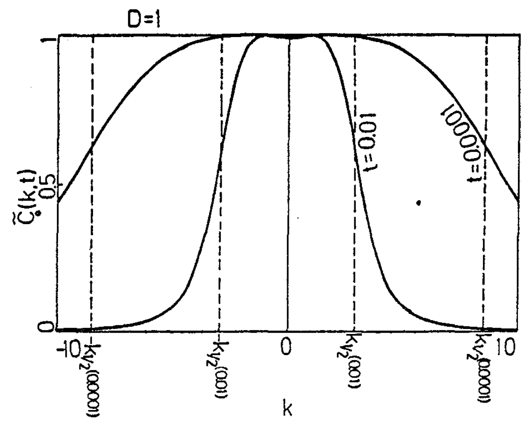
周期パターンを含んだ空間ドメインが見えはじめる時刻t_pは、

$$t_p \simeq \frac{1}{2 D k_c^4} \tag{21}$$

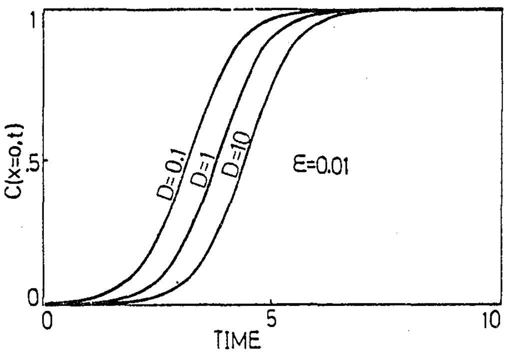
図III，IVでは、相関関数$C(x,t)$の生長，図Vでは、それの空間拡散を，それぞれ表す。



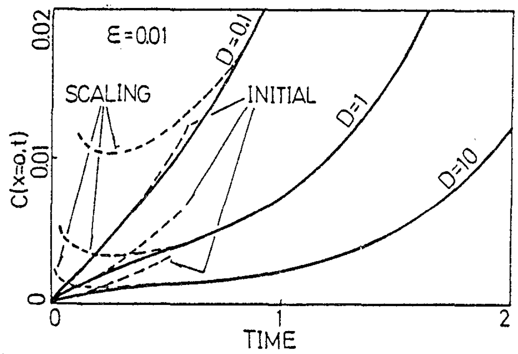
図I(破線:近似)



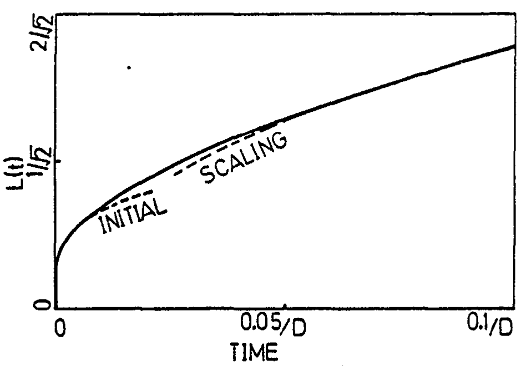
図II (破線:近似)



図III



図IV



図V

文献:

1) M.Suzuki, Prog.Theor.Phys. 56(1976)77; Adv.Chem.Phys. 46(1981)195; J.Math.Phys. 26(1985)601; Prog.Theor.Phys.Suppl. 79(1984)125.
2) M.Suzuki, Y.Liu and T.Tsuno, submitted to Physica A.
3) K.Kawasaki, M.C.Yalabik and J.D.Gunton, Phys.Rev.A 17(1978)455.
4) F.de Pasquale, P.Tartaglia and P.Tombesi, Phys.Rev.A 31(1985)2447.
5) J.Swift and P.C.Hohenberg, Phys.Rev.A 15(1977)319.
6) H.S.Greenside and W.M.Coughran,Jr., Phys.Rev.A 30(1984)398.